

Вопросы к экзамену, III семестр

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши-Маклорена).
3. Теоремы Коши и Римана о перестановке членов в числовых рядах.
4. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Лейбница).
5. Арифметические операции над сходящимися числовыми рядами. Теорема Мертенса.
6. Бесконечные произведения, критерии сходимости.
7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.
8. Абсолютная сходимость двойного ряда. Взаимосвязь между сходимостью четырёх рядов: повторных, двойного и "одинарного".
9. Обобщённые методы суммирования расходящихся рядов (методы Чезаро и Луссона-Абеля).
10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши.
11. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Вейерштрасса).
12. Признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции функциональной последовательности и рядов.
13. Почленное дифференцирование, существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.
14. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов (две теоремы). Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью.
15. Теорема Арцела. Признак равномерной непрерывности функциональной последовательности.
16. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.
17. Определение и доказательство существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций. Основные свойства двойного интеграла.
18. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Эквивалентность двух определений.
19. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.
20. Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости. Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций.
21. Эквивалентность понятий сходимости абсолютной сходимости.
22. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
23. Понятие поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.
24. Площадь поверхности. Квадрируемость поверхности.
25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Преобразование базисов. Инварианты линейного оператора.
27. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Повторные операции теории поля.
28. Формула Грина. Формула Остроградского-Гаусса.
29. Формула Стокса.
30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Из элементов Числовой послед-стии, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ формально образуем бесконечную сумму:

$$u_1 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1)$$

Сумма (1) – числовой ряд, u_k – члены ряда (1). Сумма первых n членов – n -я частичная сумма:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad (2)$$

О.Ряд (1) называется сходящимся, если сходится послед-сть $\{S_n\}$ частичных сумм (2) этого ряда. Прелед S послед-сти $\{S_n\}$ – сумма ряда (1): $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.
Если для ряда (1) S преледса послед-сти частичных сумм (2), то ряд **расходившийся**.

31. Изучение числовых рядов – новая форма изучения числовых послед-стий. 1) каждому ряду (1) однозначно соответствует послед-сть $\{S_n\}$ его частичных сумм, 2) у числовой послед-сти $\{S_n\}$ однозначно соответствует ряд с членами $u_k = S_k - S_{k-1}$.

32. Из определения его сходимости $\Rightarrow$ он – произвольного ряда: 1. Обращивание конечного числа членов ряда (или добавление конечного числа членов) не влияет на сходимости или расходимость этого ряда (т.к. после отбрасывания (или добавления) конечного числа членов все частичные суммы ряда, начиная с некоторого n , изменяются на одну и ту же const).

II. Если $s = \text{const}$ $0, u_k = s_k - s_{k-1}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$. (Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ и $S_n = \sum_{k=1}^n s_k$ и учитывая $S_n = s_n$, где $s \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$)

Критерий Коши для послед-стий: Числовая послед-сть $\{S_n\}$ будет сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такой, что для $\forall n \geq N$ и для $\forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Т1 (Критерий Коши для рядов): Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такой, что для $\forall n \geq N$ и для $\forall p \in \mathbb{N} : |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$ (3)

Док-во: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится $\Leftrightarrow S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$ и применить критерий Коши для послед-стий.

С1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то послед-стий $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ является бесконечно малой.

Док-во. Из (3) и из Т1 (Если все элементы сходящейся послед-сти $\{x_n\}$ по крайней мере начинаются с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \leq b, n \geq N$, то прелед x этой послед-сти удовлетворяет неравенству $x \geq b$) $\Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такой, что $|u_n| \leq \varepsilon$ при $n \geq N$.

С2 (Необходимое условие сходимости ряда): Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы послед-стий $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ являлась бесконечно малой (иначе для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы $u_n \rightarrow 0$).

Док-во. Пусть дано $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ $\exists n \geq N$ для $\forall p \in \mathbb{N}$ $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$ $\Rightarrow$ если положить $N_0 = N+1$, то при $n \geq N_0 : |u_n| < \varepsilon$

Основное с-во ряда с неотрицательными членами: послед-сть частичных сумм такого ряда является неубывающей.

Т2. Числовой ряд с неотрицательными членами сходится, необходимо и достаточно, чтобы послед-сть частичных сумм этого ряда была ограничена.

Необходимость из Т1. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Достаточность: послед-сть частичных сумм не убывает $\Rightarrow$ для ее сходимости достаточно, чтобы она была ограничена (по Т1. Если неубывающая послед-сть ограничена сверху, то она сходящаяся).

2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши – Маковского).

О.Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется сходящимся, если сходится послед-сть $\{S_n\}$ частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ этого ряда. Прелед S послед-сти $\{S_n\}$ – сумма ряда (1): $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Основное с-во ряда с неотриц. членами: послед-сть частичных сумм ряда – неубывающая.

Т1. Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы послед-сть частичных сумм этого ряда была ограничена.

Необ-сть из Т1. Всякая сходящаяся послед-сть является ограниченной.

Дост-сть: послед-сть частичных сумм не убывает $\Rightarrow$ для ее сходимости достаточно, чтобы она была ограничена (по Т1. Если неубывающая послед-сть ограничена сверху, то она сходящаяся).

Т2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ – 2 ряда с неотрицательными членами и для всех k справедливо неравенство: $p_k \leq q_k$ (1)

Тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} q_k \Rightarrow$ расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Док-во. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$ и $S'_n = \sum_{k=1}^n q_k$. Из (1) $\Rightarrow S_n \leq S'_n \Rightarrow$ 1) из неограниченности $\{S'_n\} \Rightarrow$ неограниченности $\{S_n\}$;

И применяем Т1 +

3. 1) В условии Т2 можно требовать, чтобы (1) было выполнено в лишь начиная с некоторого номера k , т.к. отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимости ряда.

2) Т2 будет справедливой, если (1) заменить: $p_k \leq c q_k$ (2) где c – const > 0 (т.к. Если $s = \text{const}$ $0, u_k = s_k - s_{k-1}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$).

С1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ – ряд с неотрицательными членами, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ – ряд со строго положительными членами и если $\exists$ конечный

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = L$$

то из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$; из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Док-во. Т.к.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = L, \text{ то для некоторого } \varepsilon > 0 \exists N:$$

$$\text{при } k \geq N : L - \varepsilon < \frac{p_k}{q_k} < L + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ при $k \geq N : p_k \leq (L + \varepsilon) q_k \Rightarrow$ нерав-во совпадает с (2) при $c = (L + \varepsilon)$. И применяем Т2.

Т3. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ – 2 ряда со строго положительными членами и для всех k :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{q_{k+1}}{q_k} \quad (3)$$

Тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$; из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Док-во. Запишем (3) для $k=1, 2, \dots, n-1$, где n – N номер:

$$\frac{p_2}{p_1} \leq \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_2} \leq \frac{p_3}{p_2}, \dots, \frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

Перемножив почленно все написанные неравенства, получим

$$\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p_n}{p_1} \Rightarrow p_n \leq p_1$$

$c = p_1/p_1$ const > 0 , не зависящая от n $\Rightarrow$ применим Т2.

Признак Даламбера и Коши основаны на сравнении ряда со сходящимися (4) или расходящимися (5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + \dots + q^k + \dots, \quad |q| < 1 \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad (5)$$

Т4 (пр-к Даламбера). Если для всех k , по крайней мере начиная с некоторого номера:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \right) \leq q \quad (6)$$

то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится) (предполагается, что все члены ряда (по крайней мере начиная с некоторого номера) строго положительны.)

II. (Пр-к Даламбера в предельной форме). Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = P$ (7)

то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ расходится при $L > 1$.

Док-во. 1) Положим $p_k = q^k$ ($p_k = 1$). Тогда $\frac{p_{k+1}}{p_k} = q$, где $q < 1$

($\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$), и перепишем (6):

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}}{p_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \right) \leq \frac{p_{k+1}}{p_k} \quad (8)$$

Т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ совпадающий с (4) (5), сходится (расходится), то из (8) по Т3 $\Rightarrow$ сходимость (расходимость) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

II) Если $L < 1$, то $\exists \varepsilon > 0 : L - \varepsilon < 1$, где $\varepsilon = L + \varepsilon - 1$. По определению предела поспеди для этого $\exists N$: при $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon \quad (9)$$

$L + \varepsilon = 1 - \varepsilon = q$ Т.к. ряд сходится.

Если же $L = 1$, то $\exists \varepsilon > 0 : L - \varepsilon = 1 - \varepsilon$ из левая неравенства (6):

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \quad (\text{при } k \geq N)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится по Т1

3. 1) и Т4(II) $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ нельзя заменить на $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ например, гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

расходится, но здесь $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ (для всех k).

2) При $L = 1$ в Т4(II) нельзя сказать ничего определенного о сходимости ряда: для гармонического ряда $L = 1$, причем он расходится. Но для $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ тоже $L = 1$, но он сходится.

Т5 (признак Коши). Если для всех номеров k , по крайней мере начиная с некоторого номера:

$$\sqrt[n]{p_n} \leq q < 1 \quad (\sqrt[n]{p_n} \geq 1) \quad (10)$$

то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

II. (признак Коши в предельной форме). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L$ (11)

то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ расходится при $L > 1$.

Док-во. 1) Положим $p_k = q^k$ ($p_k = 1$) $\Rightarrow$ из (10) $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q$ ($p_k \geq p_k$) (12)

Т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ совпадающий с (4) (5), сходится (расходится), то из (12) $\Rightarrow$ сходимость (расходимость) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ по Т2

II) Дословно повторить док-во Т4(II), заменив $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ на $\sqrt[p_k]{p_k}$.

3. Аналогичны замечания к Т4.

Пр-к Коши более сильный, чем пр-к Даламбера: когда действует пр-к Даламбера, действует и пр-к Коши, но э ряд, для которого действует Коши и не действует Даламбер.

Уте. Из существования равного L прелед

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L \quad (7)$$

$\Rightarrow$ существование равного тому же L прелед

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L \quad (11)$$

Л1. Если $\{a_n\} \rightarrow L$, то к тому же L сходится и послед-сть $a_n^m = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m / n$ средних арифметических чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Док-во. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m / n = L^m$ $\Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$: $|a_k - L| < \varepsilon/2$ для всех $k \geq N$. При всех $n \geq N$:

$$a_n - L = (a_1 - L) + \dots + (a_n - L) = \left[\frac{(a_1 - L) + \dots + (a_n - L)}{n} \right] + \left[\frac{(a_1 - L) + \dots + (a_n - L)}{n} \right]$$

получим, что $|a_n - L| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$.

Модуль дробей в (1) $\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(n-N)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Т.к. N фиксирован, то модуль дробей в (1) $\leq \varepsilon/2$ при всех $n \geq N$, где N – достаточно большое число $\Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$.

Л2. Если $\{a_n\} \rightarrow L$ (все $a_n > 0$), то к L сходится и послед-сть $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ средних геометрических чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Док-во. Для $L > 0$ силу непрерывности логарифма, функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln L$

$\Rightarrow$ по Л1 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln L$

$\Rightarrow$ т.к. показательная функция непрерывна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} = e^{\ln L} = L$

(Эти рассуждения верны и при $L = 0$, если считать $\ln 0 = -\infty$).

Док-во-уте. Примеры Л2 $a_k = p_k$, $a_k = p_k/p_{k-1}$, $a_k = p_k/p_{k-1}$ и т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$ существование равного

тому же L прелед $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = L$

Т6. Признак Коши – Маковского. Пусть $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на $n \geq n$, где n – N фиксированный номер.

Тогда числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots$ (13)

сходится $\Leftrightarrow$ прелед при $n \rightarrow \infty$ послед-сти

$$a_n = \int_1^n f(x) dx \quad (14)$$

Док-во. Пусть $k - N$ номер $k \geq m+1, \forall$ хиз $|k - 1, k|$. Т.к. $f(x)$ не возрастает на $[k - 1, k]$, то для $\forall x \in [k - 1, k]: f(k) \leq f(x) \leq f(k - 1)$ (15)

Из (15) и из свойства интеграла

$$\Rightarrow \int_k^1 f(x) dx \leq \int_{k-1}^1 f(x) dx \leq \int_{k-1}^1 f(k - 1) dx \Rightarrow$$

$$f(k) \leq \int_k^1 f(x) dx \leq f(k - 1) \quad (16)$$

(16) установлены для $\forall k \geq m+1$. Запишем для k равных $m+1, m+2, \dots, n$, где n – N номер: $n \geq m$:

$$f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f(x) dx \leq f(m)$$

$$f(m+2) \leq \int_{m+1}^{m+2} f(x) dx \leq f(m+1)$$

$$\dots$$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n - 1)$$

Складывая почленно: $\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m+1}^n f(k)$ (17)

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$

Учитывая (14), перепишем (17): $S_n - f(m) \leq a_n \leq S_n - f(n)$ (18)

Из (14) $\Rightarrow$ послед-сть $\{a_n\}$ – неубывающая $\Rightarrow$ для ее сходимости необходима и достаточна ее ограниченность. Для сходимости (13) по Т1 необходима и достаточна ограниченность послед-сти $\{S_n\}$. Из (18) $\Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\Leftrightarrow$ ограниченность $\{a_n\} \Leftrightarrow \{a_n\}$ сходящаяся.

3. Теоремы Коши и Римана о перестановке в числовых рядах.

О1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ (2).

Т1. Из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1). Док-во. Используем критерий Коши для ряда (1) (Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$: для $\forall n \geq N$ и для $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \quad (3)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Ряд (2) сходится $\Rightarrow$ по критерию Коши $\exists N$: для $\forall n \geq N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$$

Т.к. как модуль суммы слагаемых $\leq$ суммы из модулей, то

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|$$

Сопоставляя эти 2 неравенства, получим неравенства (3).

О2. Ряд (1) называется условно сходящимся, если этот ряд сходится, а время как соответствующий ряд из модулей (2) расходится.

Пример абсолютно сходящегося ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots, \quad \alpha > 1$$

Пример условно сходящегося ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Т2. (теорема Римана). Если ряд сходится условно, то, каково бы ни было наперед взятое число L , можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сошелся к числу L .

Док-во. Пусть (1) $\rightarrow N$ условно сходящийся ряд. Пусть $p_1, p_2, p_3, \dots$ – положительные члены ряда (1), $q_1, q_2, q_3, \dots$ – модули отрицательных членов ряда (1), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряду. Ряд (1) содержит бесконечное число положительных и отрицательных членов, ибо если бы членов одного знака было конечное число, то, отбросив не влияющие на сходимость конечное число первых членов, мы бы получили бы ряд, состоящий из членов одного знака, для которого сходимость означала бы абсолютную сходимость.

Доквем, что $P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k, Q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k$

5. Арифметические операции над сходящимися числовыми рядами. Теорема Мертенса.

О.Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется **сходящимся**, если сходится послед-сть $\{S_n\}$ частичных сумм (2) этого ряда. Предел S послед-сти $\{S_n\}$ - **сумма ряда** (1): $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$
О1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$.
П1. Если 2 ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся имеют суммы соответственно U и V , то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ сходится и имеет сумму $U \pm V$.
Док-во. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k), \quad U_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k$$

$$\Rightarrow S_n = U_n \pm V_n$$

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V,$$

$$\text{то } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = U \pm V \text{ по Т (Сумма (разность)}$$

сходящихся послед-стей является сходящейся послед-стью, предел которой равен сумме (разности) пределов этих послед-стей)

Т2. Если 2 ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся абсолютно и имеют суммы соот-но U и V , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_k v_l$ ($k, l = 1, 2, \dots$), заумноженных в $\forall$ порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна UV .

Док-во. Пусть $u_k, v_l, w_k, w_l, \dots$ - произведения вида $u_k v_l$ ($k, l = 1, 2, \dots$), заумноженные в $\forall$ порядке. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n |w_k|$. Сумма S_n состоит из членов вида $|u_k v_l|$. Пусть m - наибольший среди индексов k и l членов, входящих в S_n . Тогда

$$S_n \leq (|u_1| + \dots + |u_m|)(|v_1| + \dots + |v_m|)$$

Здесь в правой части стоят произведения в $\forall$ частичных сумм рядов $\sum_{k=1}^m |u_k|$ и $\sum_{l=1}^m |v_l| \Rightarrow$ из сходимости этих рядов с неотрицательными членами все их частичные суммы $\Rightarrow$ и их произведения ограничены $\Rightarrow$ ограничена $\{S_n\} \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ его сумма S не зависит от порядка суммирования по теореме Коши (Единственный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.) Умноשל-сть (подпослед-сть) частичных сумм этого ряда сходится к числу $S \Rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = UV$, т.к. $\{W_n\} \rightarrow UV$, где $W_n = (u_1 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_n)$. *

Произведение рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ удобно записывать в специальном виде:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} v_l \right) = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots$$

Т3 (теорема Мертенса). Ряд, полученный перемножением двух рядов указанным специальным способом, сходится к произведению сумм перемножаемых рядов в случае, когда один из перемножаемых рядов сходится абсолютно а другой - сходится хотя бы условно
Док-во. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, $\sum_{l=1}^{\infty} v_l$ сходится хотя бы условно. Обозначим

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad V_n = \sum_{l=1}^n v_l, \quad U = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad V = \sum_{l=1}^{\infty} v_l$$

$$\text{Положим } W_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1,$$

$$W_n = w_1 + \dots + w_n$$

$$\text{Достаточно доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = UV$$

Элементарно проверяется, что

$$W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \dots + u_n V_1$$

Из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = U \Rightarrow$ его остаток $\alpha_n = V - V_n$ - бесконечно малая $\Rightarrow$ ограниченная послед-сть $\Rightarrow \exists M: |\alpha_n| \leq M$ для всех n . Заметим, что

$$W_n = u_1 (V - \alpha_n) + u_2 (V - \alpha_{n-1}) + \dots + u_n (V - \alpha_1) = U_n V - \beta_n$$

$$\text{где } \beta_n = u_1 \alpha_n + u_2 \alpha_{n-1} + \dots + u_n \alpha_1$$

т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$, то достаточно доказать, что $\{\beta_n\}$ - бесконечно малая послед-сть. Т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то, фиксируя $\forall \epsilon > 0$, найдем для него m :

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\epsilon}{2M}$$

$$\text{И } \exists M_1: \text{ для } \forall n \quad \sum_{k=1}^n |u_k| \leq M_1$$

Представив β_n в виде $\beta_n = |u_1 \alpha_n + \dots + u_m \alpha_{n-m+1}| + |u_{m+1} \alpha_{n-m} + \dots + u_n \alpha_1|$ и выбрав по m номер n настолько большим, что

$$|\alpha_n| < \frac{\epsilon}{2M_1}$$

при $k > n - m$ (это можно сделать в силу бесконечной малости $\{\alpha_k\}$), с помощью неравенств:

$$\sum_{k=m+1}^n |u_k| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad \sum_{k=1}^m |u_k| \leq M_1,$$

$$|\alpha_n| \leq M, \quad |\alpha_k| < \frac{\epsilon}{2M_1}$$

(при $k > n - m$) получим, что при $l \leq n$, в выражении для β_n каждая $|\alpha_l| < \epsilon/2 \Rightarrow |\beta_n| < \epsilon$ при $n \geq n_1$. Т.к. $\epsilon > 0$ произвольно $\Rightarrow \{\beta_n\}$ - бесконечно малая послед-сть.

6. Бесконечные произведения, критерии сходимости.

Пусть дана бесконечная числовая послед-сть $v_1, v_2, \dots, v_k$. Бесконечное произведение:

$$v_1 v_2 \dots v_k \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \quad (1)$$

v_k - члены бесконечного произведения. n -е частичное произведение:

$$P_n = v_1 v_2 \dots v_k \dots = \prod_{k=1}^n v_k$$

О. Бесконечное произведение (1) называется **сходящимся**, если послед-сть частичных произведений P_n имеет конечный предел P , отличный от 0;

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$$

Каждому бесконечному произведению однозначно соответствует послед-сть его частичных произведений и каждой числовой послед-сти $\{P_k\}$, все элементы которой $\neq 0$, однозначно соответствует бесконечное произведение, для которого эта послед-сть является послед-стью частичных произведений ($v_k = P_k / P_{k-1}$ при $k > 1$ и $v_1 = P_1$).

П1. Необходимым условием сходимости бесконечного произведения (1) является стремление к 1 его k -го члена при $k \rightarrow \infty$.

Док-во. Пусть бесконечное произведение (1) сходится и имеет значение $P \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} P = P \neq 0$$

$$\text{Т.к. } v_k = P_k / P_{k-1} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} v_k \exists \text{ и } = 1. *$$

З. На сходимости бесконечного произведения не влияет удаление любого конечного числа членов этого произведения (если среди этих членов нет 0). Если (1) сходится, то по П1 все его члены $v_k > 0$, начиная с некоторого номера. Т.к. конечное число первых членов не влияет на сходимости бесконечного произведения, то при изучении вопроса о сходимости бесконечных произведений можно, не ограничивая общности, рассматривать лишь такие бесконечные произведения, у которых все члены > 0 .

Т2. Для того чтобы бесконечное произведение (1) с положительными членами сходилась, необходимо и достаточно, чтобы сходилась ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k \quad (2)$$

В случае сходимости сумма S ряда (2) и значение P произведения (1) связаны формулой $P = e^S$.
Док-во. Обозначим

$$P_n = v_1 v_2 \dots v_k \dots = \prod_{k=1}^n v_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \ln v_k \Rightarrow S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}$$

В силу непрерывности показательной функции для всех значений аргумента и непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента $\{P_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\{S_n\}$, причем если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^S$ ■
Последнее равенство означает

Умт. Необходимым условием сходимости двойного ряда (6) является стремление к 0 его общего члена, т. е. существование при независимом стремлении n и k бесконечности равного 0 предела

$$\prod_{k=1}^n (1 + u_k) = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_k) \dots \quad (3)$$

Из Т2 $\Rightarrow$ вопрос о сходимости произведения (3) $\Leftrightarrow$ вопросу о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k) \quad (4)$$

Т3. Если все u_k (по крайней мере начиная с некоторого номера) сохраняют один и тот же знак, то для сходимости бесконечного произведения (3) необходимо и достаточно, чтобы сходилась ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (5)$$

Док-во. Т.к. условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$$

необходимо и для сходимости ряда (5), и для сходимости произведения (3), можно считать это условие выполненным при док-ве как необх-сти, так и дост-сти. Но из этого условия и из асимптотич. формулы

$$\ln(1 + y) = y + o(y)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + u_k)}{u_k} = 1 \quad (6)$$

$$\text{и } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{\ln(1 + u_k)} = 1 \quad (7)$$

По условию теоремы все члены рядов (4) и (5), начиная с некоторого номера, сохраняют один и тот же знак $\Rightarrow$ из (6) и (7) $\Rightarrow$ ряд (5) сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд (4) в силу Сл* из Т3**.

О. Бесконечное произведение (3) называется **абсолютно сходящимся** $\Leftrightarrow$ сходится абсолютно ряд (4).
Т4. Бесконечное произведение (3) сходится абсолютно $\Leftrightarrow$ сходится абсолютно ряд (5).

Для док-ва доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1 + u_k)|$. Это вытекает из существования пределов (6) и (7).

*. Если $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ - ряд с неотрицательными членами, $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ - ряд со строго положительными членами и если $\exists$ конечный $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_k}{P_{k-1}} = L$, то из сходимости

$\sum_{k=1}^{\infty} P_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$; из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} P_k \Rightarrow$ расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$.

**. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ - 2 ряда с неотрицательными членами и для всех номеров k справедливо неравенство $P_k \leq P_{k+1}$. Тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} P_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$; из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} P_k \Rightarrow$ расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$.

7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами. Рассмотрим счетное множество бесконечных числовых послед-стей

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots \quad (1)$$

$$a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{m1}, \dots$$

Промумировав каждую строку матрицы отдельно, получим бесконечную послед-сть рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Промумировав эту послед-сть, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right) \quad (3)$$

повторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right) \quad (3)$

Другой повторный ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right) \quad (4)$

получится, если сначала промумировать отдельно каждый столбец матрицы (1), а затем взять сумму элементов полученной при этом послед-сти.

О1. Повторный ряд (3) называется **сходящимся**, если сходится каждый из рядов (2) и если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, в котором A_k обозначает сумму k -го ряда (2).

О2. Повторный ряд (4) называется **сходящимся**, если сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

и если сходится ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \bar{A}_l$, в котором $\bar{A}_l$ обозначает сумму l -го ряда (5).

С матрицей (1) связывают еще двойной ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (6)$

О3. Двойной ряд (6) называется **сходящимся**, если при независимом стремлении двух индексов n и k бесконечности $\exists$ конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} S_{mn} \quad (7)$$

прямоугольных частичных сумм

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \quad (8)$$

Предел (7) называют суммой двойного ряда (6). Из этого определения $\Rightarrow$ если двойной ряд (6) получен перемножением членов двух сходящихся «одинарных» рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} c_l \quad (9)$$

т. е. если члены двойного ряда (6) равны $a_{kl} = b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится, а его сумма равна произведению сумм рядов (9).

Из (8) $\Rightarrow$ для $\forall m \geq 2, n \geq 2$:
 $A_{mn} = S_{mn} - S_{m(n-1)} - [S_{(m-1)n} - S_{(m-1)(n-1)}]$

Последнее равенство означает **Умт.** Необходимым условием сходимости двойного ряда (6) является стремление к 0 его общего члена, т. е. существование при независимом стремлении n и k бесконечности равного 0 предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mn} \quad (10)$$

П1. Если сходится двойной ряд (6) и если сходится все ряды по строкам (2), то сходится и повторный ряд при $m \rightarrow \infty$ правой части (10):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_{mn} \right)$$

Пусть $\exists$ предел (7) и $\exists$ для $\forall m$ предел (10). Из существования равного S предела (7) $\Rightarrow$ для $\forall \epsilon > 0 \exists m_0$ и n_0 : при $m \geq m_0, n \geq n_0$ справедливо $|S_{mn} - S| < \epsilon \Rightarrow$ т.к. для $\forall m \exists$ предел (10): для $\forall m \geq m_0$ справедливо

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_{mn} - S \right| \leq \epsilon$$

$\Rightarrow \exists$ повторный предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_{mn} \right) = S$

Т2. Если все э-ты матрицы (1) неотрицательны, то для сходимости составленного из этой матрицы двойного ряда (6) необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы (8) были ограничены.

Док-во. Необх-сть очевидна. Дост-сть. Из ограниченности $\{S_{mn}\} \Rightarrow$ существование точной верхней грани этого множества S :

$$S = \sup_{1 \leq m, n < \infty} S_{mn}$$

По определению точной верхней грани для $\forall \epsilon > 0 \exists S_{m_0 n_0} : S - \epsilon < S_{m_0 n_0} \leq S \quad (11)$

Для всех m и n : при $m \geq m_0, n \geq n_0$, из неотрицательности элементов $\Rightarrow S_{mn} \geq S_{m_0 n_0} \Rightarrow$ и из (11): $S - \epsilon \leq S_{mn} \leq S$ для всех m и n при $m \geq m_0, n \geq n_0 \Rightarrow \exists$ равный S предел (7) $\Rightarrow$ сходимости двойного ряда (6).

8. Абсолютная сдимость двойного ряда. Взаимосвязь между сходимостью 4-х рядов: повторных, двойного и «одинарного».

Рассмотрим счетное множество бесконечных послед-стей $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$
 $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots \quad (1)$
 $\dots$
 $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{m1}, \dots$

Промумировав каждую строку матрицы отдельно, получим бесконечную послед-сть рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Промумировав эту послед-сть, получим повторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right) \quad (3)$

Другой повторный ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right) \quad (4)$

получится, если сначала промумировать отдельно каждый столбец матрицы (1), а затем взять сумму элементов полученной при этом послед-сти.

О1. Повторный ряд (3) называется **сходящимся**, если сходится каждый из рядов (2) и если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, в котором A_k обозначает сумму k -го ряда (2).

О2. Повторный ряд (4) называется **сходящимся**, если сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

и если сходится ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \bar{A}_l$, в котором $\bar{A}_l$ обозначает сумму l -го ряда (5).

С матрицей (1) связывают еще двойной ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (6)$

О3. Двойной ряд (6) называется **сходящимся**, если при независимом стремлении n и k $\exists$ конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} S_{mn} \quad (7)$

прямоугольных частичных сумм $S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \quad (8)$

Предел (7) называют суммой двойного ряда (6). Из этого определения $\Rightarrow$ если двойной ряд (6) получен перемножением членов двух сходящихся «одинарных» рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} c_l \quad (9)$$

т. е. если члены двойного ряда (6) равны $a_{kl} = b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится, а его сумма равна произведению сумм рядов (9).

О4. Двойной ряд (6) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится двойной ряд, составленный из модулей элементов матрицы (1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (6')$$

П1. Если сходится двойной ряд из модулей (6'), то сходится и двойной ряд (6).
Док-во. Положим

$$p_k = \frac{|a_{k1}| + |a_{k2}|}{2}, \quad q_l = \frac{|a_{1l}| + |a_{2l}|}{2} \Rightarrow a_{kl} = p_k - q_l \quad (10)$$

Здесь $0 \leq p_k, q_l \leq |a_{kl}|$. По Т** из сходимости двойного ряда (6') $\Rightarrow$ ограниченность его частичных сумм $\Rightarrow$ ограничены частичные суммы двойных рядов

$$\sum_{k=1}^m p_k \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^n q_l$$

$\Rightarrow$ эти ряды сходятся по Т**.

Обычный ряд, его члены - заумноженные в $\forall$ порядке элементы матрицы (1): $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (11)$

Т2. Рассмотрим 4 ряда: два повторных рядов (3) и (4), двойной ряд (6) и ряд вида (11). Если хотя бы один из этих 4-х рядов сходится при любом его члене из абсолютных величин, то все 4 ряда сходятся и имеют один и тот же суму.

Док-во. 1) док-во аналогично для повторных рядов (3) и (4) рассуждениям в предыдущем параграфе (только меняются роли n и k индексов) $\Rightarrow$ рассуждения только ряд (6).

1) док-во, что из сходимости повторного ряда (3), которого все члены заменены их модулями $\Rightarrow$ абсолютная сдимость ряда (11). Пусть

$$S' = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^n |a_{kl}| \right) \quad (3')$$

$\Rightarrow$ при $\forall m$ и $n \quad \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |a_{kl}| \leq S' \quad (12)$

Если $S' = |a_{11}| + |a_{12}| + \dots + |a_{1n}| - \dots$ - частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (11')$

неуменьшается при замене членов ряда (11) их модулями, то можно найти столь большие m и n , что все члены ряда (11), входящие в его частичную сумму с номером g , будут содержаться в первых m строках и первых <

9. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов (Чезаро и Пуассона – Абеля).

$$u_1 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1)$$

Сумма (1) – числовой ряд, u_k – члены ряда (1). n -я частичная суммой ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad (2)$$

О.Ряд (1) называется сходящимся, если сходится послед-сть $\{S_n\}$ частичных сумм (2) этого ряда. При этом предел S указанной последовательности $\{S_n\}$ называется суммой ряда (1):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Ряд, сходящийся в обычном смысле и имеющий обычную сумму S , должен иметь обобщенную сумму, и притом также равную S . Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется **регулярным**. Понятие обобщенной суммы подчиним условию: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ имеет обобщенную сумму L ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ имеет обобщенную сумму V , то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k)$$

где B – V постоянные, имеет обобщенную сумму $(AU + BV)$. Метод суммирования, удовлетворяющий указанному условию, называется **линейным**. Метод **Чезаро(метод средних арифметических)**. Ряд (1) суммируем методом Чезаро, если $\exists$ предел средних арифметических сумм этого ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} \quad (3)$$

Предел (3) называется **обобщенной в смысле Чезаро суммой** ряда (1).

Линейность метода суммирования Чезаро очевидна.Регулярность вытекает из L^* , т.к. если $\{S_n\} \rightarrow S$, то предел (3) $\rightarrow S$ и также $= S$. **Метод Пуассона – Абеля**. По ряду (1) составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + \dots + u_k x^{k-1} + \dots \quad (4)$$

Если он сходится для $\forall x$ из $0 < x < 1$ и если его сумма $S(x)$ имеет левое предельное значение

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x)$$

в точке $x = 1$, то ряд (1) суммируем методом Пуассона – Абеля. Это предельное значение называется суммой ряда (1) в смысле Пуассона – Абеля.

Линейность метода Пуассона – Абеля очевидна. Докажем регулярность. Пусть ряд (1) сходится в обычном смысле и его сумма $= S$. Надо доказать: 1) ряд (4) сходится для $\forall x$ из $0 < x < 1$; 2) сумма $S(x)$ ряда (4) имеет в точке $x = 1$ левое предельное значение, равное S .

1) (1) сходится $\Rightarrow$ то послед-сть его членов бесконечно малая $\Rightarrow$ и ограниченная $\Rightarrow \exists M$: для всех k : $|u_k| \leq M \Rightarrow$ для $\forall x$ из $0 < x < 1$ оценка модуля k -го члена ряда (4): $|u_k x^{k-1}| \leq M |x|^{k-1}$. $|x| < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ сходится $\Rightarrow$ в силу 3^{**} сходится ряд (4).

2) Пусть S_n – n -я частичная сумма ряда (1), а S – его обычная сумма. С помощью преобразования Абеля

*** можно убедиться, что для $\forall x$ из $0 < x < 1$:

$$\sum_{k=1}^n u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^n S_k x^{k-1} \quad (5)$$

Вытем (5) из тождества:

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}$$

Обозначая через $r_k k$ -й остаток ряда (1):

$$S - \sum_{k=1}^n u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^n r_k x^{k-1} \Rightarrow$$

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^n r_k x^{k-1} \quad (6)$$

Надо доказать, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: левая часть (6) меньше ε для $\forall x$ из $1 - \delta < x < 1$. Т.к. $r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то для $\varepsilon/2 > 0 \exists k_0 : |r_k| < \varepsilon/2$ при $k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\left| (1-x) \sum_{k=k_0}^n r_k x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| (1-x) \sum_{k=k_0}^n x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Остается доказать, что для x , достат-но близких к 1,

$$\left| (1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

но это очевидно, т.к. сумма в последнем неравенстве ограничена. Регулярность метода доказана.

*: Если послед-сть $\{a_n\}$ сходится к пределу l , то к тому же пределу сходится и послед-сть $b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n$ средних арифметических чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

. **Т. сравнения. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ – 2 ряда с неотрицательными членами. Пусть для всех номеров k справедливо: $p_k \leq p_k$. Тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \Rightarrow$ расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

3. Т. справедлива, если $p_k \leq p_k$ заменить на:

$p_k \leq c p_k$, где c – V const >0 .

***: Пусть $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – 2 V послед-сти, $S_1 = u_1 + u_2 +$

$\dots + u_n$, и p – 2 V номера $(n > 0, S_0 = 0)$. Тогда справедливо преобразование Абеля

$$\sum_{k=1}^{n+1+p} u_k v_k = \sum_{k=1}^n S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p+1} v_{n+p+1} - S_n v_{n+1}$$

10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимост. Критерий Коши.

Пусть на числовой прямой E или np – мерном евклидовом np -ве E^* задано некоторое множество $\{x\}$. Если каждому n из натурального ряда чисел 1, 2, ..., ..., n_k ... ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, то множество заномеранных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ называется **функциональной послед-стью**. $f_n(x)$ – члены или элементы послед-сти, множество $\{x\}$ – область определения послед-сти. Пусть $\{u_n(x)\}$ – функц. послед-сти, $\{x\}$ – ее область определения. Формально написанная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \dots \quad (1)$$

бесконечного числа членов этой функц. послед-сти – функциональный ряд. $u_n(x)$ – члены ряда, $\{x\}$ – область определения этого ряда. Сумма первых n членов ряда (1) – n -я частичная сумма. Изучение функц. рядов $\Rightarrow$ изучение функц. послед-стей, ибо каждому функц. ряду (1) однозначно соответствует функц. послед-сть $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$ (2)

его частичных сумм и, наоборот, каждой функц. послед-сти (2) однозначно соответствует функц. ряд (1) с членами $u_n(x) = S_1(x), u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ при $n \geq 2$.

Пусть $\{x\}$ np -ва E^* – область определения функц. послед-сти (функц. ряда). Фиксируем V точку $x_0 = (x^1, x^2, \dots, x^p) \in \{x\}$ и рассмотрим все члены функц. послед-сти (функц. ряда) в $x_0 \Rightarrow$ получим числовую послед-сть (числовой ряд). Если эта числовая послед-сть (числовой ряд) сходится, то функц. послед-сть (функц. ряд) сходится в точке x_0 . Множество всех точек x_0 , x_0 которых сходится данная функц. послед-сть (функц. ряд), называется **областью сходимости** этой послед-сти (ряда). Пусть $\{x\}$ – область сходимости функц. послед-сти $f_n(x)$. Совокупность пределов, взятых для всех точек $x \in \{x\}$, порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, определенной на $\{x\}$. Эту функцию называют **предельной функцией** функц. послед-сти.

Если $\{x\}$ – область сходимости функц. ряда (2), то на $\{x\}$ определена функция $S(x)$, являющаяся **предельной функцией** послед-сти частичных сумм этого ряда и называемая его суммой.

Послед-сти $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ (3) сходится на $\{x\}$ np -ва E^* к предельной $f(x)$.

01. Послед-сть (3) сходится к функции $f(x)$ равномерно на $\{x\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$ и для всех точек $x \in \{x\}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (4)$$

02. Функц. ряд называется равномерно сходящимся на $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если послед-сть $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Т1(критерий Коши). Чтобы функц. послед-сть $\{f_n(x)\}$ равномерно на $\{x\}$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость неравенства

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

для всех номеров $n (n \geq N(\varepsilon))$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех точек $x \in \{x\}$.

Т2. Чтобы функц. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ (6) равномерно на $\{x\}$ сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, гарантирующий справедливость

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (7)$$

для всех номеров $n (n \geq N(\varepsilon))$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех точек $x \in \{x\}$.

(Т2 – следствие Т1, т.к. в левой части (7) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм с номерами n и p функц. ряда (6)).

Док-во Т1. Необ-сть. Пусть $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ на $\{x\} \Rightarrow$ фиксировав $V \varepsilon > 0$, найдем $N(\varepsilon)$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

справедливо для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$ и для всех $x \in \{x\}$.

Если p – V натур. число, то при $n \geq N(\varepsilon)$: $n+p \geq N(\varepsilon)$ для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех $x \in \{x\}$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то из (8) и (9):

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \equiv$$

$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех $x \in \{x\}$).

Дост-сть. Пусть для $\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$:

справедливо для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех $x \in \{x\}$. Из (5) и из критерия Коши сходимости числовой последовательности (Чтобы послед-сть была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной) $\Rightarrow$ сходимост. $\{f_n(x)\}$ в каждой точке $x \in \{x\}$ и существование определенной в каждой $x \in \{x\}$ предельной функции $f(x)$.

Фиксировав $\forall n (n \geq N(\varepsilon))$ и $\forall x \in \{x\}$, перейдем в (5) к пределу при $p \rightarrow \infty$. Используя Т1 (Если все элементы сходящейся послед-сти $\{x_n\}$, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют

неравенств $x_n \geq b (x_n \leq b)$, то и предел этой послед-сти удовлетворяет неравенств $x \geq b (x \leq b)$)

получим, что для $\forall n (n \geq N(\varepsilon))$ и $\forall x \in \{x\}$:

$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| = f(x)$ на $\{x\}$.

Т1. Признак равномерной сходимости функц. рядов (два признака Абеля, признак Дирхле – Абеля, Вейерштрасса).

01. Функц. послед-сть $\{f_n(x)\}, \dots, f_n(x), \dots$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$ и для всех $x \in \{x\}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

02. Функц. ряд называется равномерно сходящимся на $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если послед-сть $\{S_n(x)\}$ его частичные сумм сходится равномерно на $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Т1. (признак Вейерштрасса). Если функц. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1)$$

определен на $\{x\}$ np -ва E^* и если $\exists$ сходящаяся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (2)$$

такой, что для всех $x \in \{x\}$ и для всех k справедливо неравенство

$$|u_k(x)| \leq c_k \quad (3)$$

то функц. ряд (1) сходится равномерно на $\{x\}$.

Док-во. Фиксируем $V \varepsilon > 0$. Т.к. ряд (2) сходится, то по критерию Коши $\exists N(\varepsilon)$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad (4)$$

для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$ и $p \in \mathbb{N}$. Из (3) и (4) и из «модуль суммы не превосходит суммы модулей» $\Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

(для всех $n (n \geq N(\varepsilon))$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех точек $x \in \{x\}$). Ряд (1) сходится равномерно на $\{x\}$ по критерию Коши**.

03. Функц. послед-сть $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной на $\{x\}$, если $\exists$ численное $M > 0$, что для всех n и всех точек $x \in \{x\}$: $|f_n(x)| \leq M$

04. Функц. послед-сть $\{v_n(x)\}$ называется послед-стью, обладающей на $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, если сходится равномерно на $\{x\}$ функц. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)] \quad (5)$$

31. Всякая послед-сть, обладающая на $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, сходится равномерно на $\{x\}$ к некоторой предельной функции. Из равномерной на $\{x\}$ сходимости ряда (5) и из критерия Коши** $\Rightarrow$ равномерная на $\{x\}$ сходимост. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)] \quad (5')$$

n -я частичная сумма которого : $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x) \Rightarrow v_1(x) - v_{n+1}(x) \leq \pm \varepsilon$, где $v_1(x) = S(x) + v_1(x)$, $S(x)$ – сумма ряда (5).

Т2 (1-й признак Абеля). Если функц. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1)$$

обладает равномерно ограниченной на $\{x\}$ послед-стью частичных сумм, а функц. послед-сть $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно ограниченным на $\{x\}$ изменением и имеет предельную функцию v , то на $\{x\}$ сходится равномерно функц. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [u_k(x) v_k(x)] \quad (6)$$

Док-во. Послед-сть $S_n(x)$ n частичных сумм ряда (1) равномерно ограничена $\Rightarrow \exists M > 0$: для всех n и всех $x \in \{x\}$: $|S_n(x)| \leq M$. Фиксируем $V \varepsilon > 0$ и по лемме N : для всех $n > N$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех точек $x \in \{x\}$ (т.к. по 31) $\{v_n(x)\} \Rightarrow v(x)$ и ряд (5) равномерно на $\{x\}$ сходится):

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (7)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (8)$$

В силу тождества Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p+1} v_{n+p+1} - S_n v_{n+1}$$

и т.к. модуль суммы не превосходит сумму модулей:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x) |v_k(x) - v_{k+1}(x)| +$$

$$+ |S_{n+p+1}(x)| \cdot |v_{n+p+1}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+1}(x)|$$

Учитывая, что для всех l всех x из $\{x\}$: $|S_l(x)| \leq M$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$

$$+ M |v_{n+p+1}(x)| + M |v_{n+1}(x)|$$

$\Rightarrow$ из (7) и (8) для всех $n > N$, всех $p \in \mathbb{N}$ всех точек $x \in \{x\}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ ряд (9) сходится равномерно на $\{x\}$ (по Т**).

32. На равномерно на $\{x\}$ сходимост. функц. ряда не влияет отбрасывание V конечного числа его 1-х членов. При отбрасывании конечного числа N 1-х членов все частичные суммы $S_n(x)$ функц. ряда, начиная с N , изменяются на одну и ту же функцию (= сумме первых N членов) $\Rightarrow$ разность $|S_{n+p}(x) - S_n(x)|$ (и критерий Коши (Т** и Т***) при $\forall n \geq N$ и для $\forall p \in \mathbb{N}$ будет иметь то же значение, что и до отбрасывания 1-х N членов.

33. Если функц. ряд сходится равномерно на $\{x\}$, то для $\forall \varepsilon > 0$ можно отбросить такое конечное число его 1-х членов, что все частичные суммы $S_n(x)$ функц. ряда, получающиеся после отбрасывания этих членов, для всех $x \in \{x\}$, будут удовлетворять неравенств $|S_n(x)| < \varepsilon$ (9)

По критерию Коши равномерной на $\{x\}$ сходимости исходного функц. ряда для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: для всех n и всех $p \in \mathbb{N}$: $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ (10)

Под знаком модуля в (10) стоит частичная сумма $S_p(x)$ с номером

функц. ряда, полученного после отбрасывания 1-х N членов у исходного ряда $\Rightarrow$ (10) переходит в (9).

Т2 (2-й признак Абеля). Если функц. ряд (1) сходится равномерно на $\{x\}$, а функц. послед-сть $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно на $\{x\}$ ограниченным изменением и является равномерно ограниченной на $\{x\}$, то функц. ряд (6) сходится равномерно на $\{x\}$.

Док-во. $\{v_n(x)\}$ равномерно ограничена на $\{x\} \Rightarrow \exists M > 0$: для всех n и всех $x \in \{x\}$: $|v_n(x)| \leq M$ (11)

Фиксируем $V \varepsilon > 0$. В силу 33 можно отбросить у ряда (1) такое конечное число N 1-х членов, что все $S_n(x)$ полученного функц. ряда будут для всех n и x из $\{x\}$ и все

$$|S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (11')$$

Отбросим у рядов (1) и (6) N 1-х N членов. (Это в силу 32 не влияет на то, равномерно на $\{x\}$ сходится ли ряд). В силу критерия Коши равномерной на $\{x\}$ сходимости ряда (5) (с отброшенными 1-ми N членами) для $M > 0 \exists N$: при всех x из $\{x\}$, для всех $n \geq N$ и для $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leq M \quad (11'')$$

В силу тождества Абеля для всех n и при всех x из $\{x\}$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k(x)| \cdot |v_k(x) - v_{k+1}(x)| +$$

$$+$$

$(x, y, z(x, y)) \in S$, $z_1(x, y) \geq z_2(x, y)$, $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ кусочно и непрерывно дифференцируемы в D . По формуле сведения тройного интеграла к повторному интегралу:

$$L = \iint_D \left(\int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} R(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z(y, x)) dx dy =$$

$$= \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = \oint_S R(x, y, z) dx dy$$

Воспользуемся тем, что $S_1 \cup S_2 = S$, и соотношением

$$-\iint_{S_2} R(x, y, z(x, y)) dx dy = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = \oint_{S_2} R \cos \gamma dy dz$$

справедливым, т.к. внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к S_2 образует тупой угол с Ox ($\cos \gamma < 0$).

32. Из доп-ва $\Rightarrow$ формулу (2) можно записать:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_S (P dy dz + Q dz dx + R dx dy)$$

Док-во ин-ва 31.

29. Формула Стокса.

Пусть S — односвязная (т.е. $\forall$ кусочно гладкая замкнутая без самопересечений кривая, расположенная на S , ограничивает мин-во, все точки которого $\in S$) поверхность в E^3 , удовлетворяющая:

- 1) S — кусочно гладкая — двусторонняя — полная ограниченная поверхность без особых точек; ее границей является замкнутый кусочно гладкий контур C ;
- 2) декартову систему координат можно выбрать так, чтобы S однозначно проектировалась на XY из 3 координатных плоскостей. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к S , $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к C , согласованный с $\mathbf{n}$, т.е. положительное направление обхода кривой совпадает в точке приложения вектора $\mathbf{t}$ с направлением $\mathbf{n}$, и если смотреть с конца $\mathbf{k}$, то контур C ориентирован положительно (его обход против часовой стрелки).

Т (формула Стокса). Пусть $\mathbf{a}$ — векторное поле, непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности поверхности S (т.е. на некотором открытом мин-ве E^3 , содержащем S). Тогда

$$\iint_S (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a}) ds = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl \quad (1)$$

Или: Поток вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ через поверхность S равен циркуляции векторного замкнутого контура C .

Док-во. В силу условий теоремы интегралы в (1) существуют. Формула (1) инвариантна относительно выбора базиса $\Rightarrow$ достаточно доказать при каком-то одном выборе базиса. Выберем декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы S однозначно проектировалась на все три координатные плоскости. Пусть $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = (\cos X, \cos Y, \cos Z)$, $\mathbf{t} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Согласим выбор системы координат так, чтобы вектор нормали $\mathbf{n}$ образовывал острые углы с координатными осями. Углывая выражение для $\text{rot } \mathbf{a}$ в декартовой системе координат

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

получим

$$\iint_S (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a}) ds = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right) ds = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl =$$

$$= \oint_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl = \oint_C (P dx + Q dy + R dz) \quad (1)$$

Достаточно доказать:

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) ds = \oint_C P dx$$

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X \right) ds = \oint_C Q dy$$

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y \right) ds = \oint_C R dz$$

S — кусочно гладкая и однозначно проектируется на Oxy . Пусть D — ее проекция, l — проекция C на xy -пл-ть $\Rightarrow$ l — диф-ная $\Phi = z = z(x, y)$, которая задает уравнение поверхности S . При этом

$$\cos Y = \frac{\sqrt{1 - \frac{z_x^2}{1 + z_x^2 + z_y^2}}}{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{z_x}{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

Ан — но $\cos Z = \frac{1}{1 + z_x^2 + z_y^2}$

$$\Rightarrow I = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} \right) \cos Z ds =$$

$$= - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] dx dy$$

т.к. на S : $P(x, y, z) = P(x, y, z(x, y))$, $\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z(x, y))$

и поверхностный интеграл по S $\Rightarrow$ двойному интегралу по D . По формуле Грина*:

$$- \iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] dx dy = \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx = \oint_C P(x, y, z) dx$$

$=$ [если $(x, y) \in \Gamma$, то $(x, y, z(x, y)) \in C] = \oint_C P(x, y, z) dx$

31. $\exists \delta > 0$ такое, что для U части $\Phi \in S$ размера $< \delta$ (ее можно расположить в сфере радиуса $\delta/2$) можно так выбрать декартову координатную систему, что Φ однозначно проектируется на все координатные плоскости. Пусть M_0 — фиксированная точка S . Проведем касательную плоскость через M_0 — пусть $\mathbf{n}_0$ — вектор единичной нормали поверхности в M_0 . Выберем прямоугольную систему координат, чтобы $\mathbf{n}_0$ составлял острые углы с осями. Т.к. поле $\mathbf{n}$ нормаль непрерывно, то $\exists$ окрестность M_δ такая, что все нормали в точках этой окрестности образуют острые углы с осями $\Rightarrow \exists$ некоторая окрестность радиуса $\delta/2$ точки M_0 , которая однозначно проектируется на все координатные плоскости. Можно выбрать универсальное, не зависящее от M_0 число $\delta > 0$. Пусть такого $\delta \exists \Rightarrow$ для каждого $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$ можно указать часть Φ , поверхность S , размеры которой $< \delta_n$, и которая не проектируется однозначно на все координатные плоскости U декартовой системы координат. Выберем в каждой Φ_n точку M_n из полученной послед-сти выберем послед-сть, сходящуюся к некоторой $M \in S$. $U M \in U M$ — окрестность, однозначно проектируемая на координатные плоскости некоторой прямоугольной системы. Эта окрестность для некоторого номера n содержит часть Φ_n , которая также будет однозначно проектироваться на все три координатные плоскости $\Rightarrow$ противоречие с выбором Φ_n .

Разобьем S на конечное число гладких частей Φ_n размер каждой из которых $< \delta$, указанного выше. Φ_n однозначно проектируется на все координатные плоскости некоторой декартовой системы координат $\Rightarrow$ формула Стокса верна для каждой Φ_n .

Проектируем левые и правые части этих формул. Интегралы по общим участкам границы Φ_n берутся в противоположных направлениях и поэтому сокращаются $\Rightarrow$ слева получили интеграл по поверхности от $(\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a})$, а справа — интеграл по границе C от $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т.е. формулу Стокса для общего случая $\Rightarrow$ формулы Стокса справедливы для поверхностей, удовлетворяющих условию 1) и не удовлетворяющих, вообще говоря, условию 2).

32. Формула Стокса верна для поверхностей S , допускающих разбиение с помощью кусочно гладких кривых на конечное число односвязных, обладающих свойством 1) поверхностей. Док-во: проектируем интегралы слева и справа в формулу Стокса для односвязных поверхностей и учесть, что интегралы по кривым, входящим в разбиение, берутся в разных направлениях и поэтому сокращаются.

33. Из доп-ва $\Rightarrow$ формулу (1) можно записать в виде (1'):

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right) ds = \oint_C (P dx + Q dy + R dz)$$

Интегралы слева и справа в (1') инвариантны, т.к. значения подынтегральных выражений равны соответственно $(\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ — инвариантным величинам. Форма подынтегральных выражений в формуле (1') тоже не меняется при переходе к новой системе $Ox'y'z'$; если в новом базисе векторное поле $\mathbf{a}$ имеет координаты P', Q', R' , то

$(\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z = \left(\mathbf{n}, \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right) =$

$$= \left(\frac{\partial R'}{\partial y'} - \frac{\partial Q'}{\partial z'} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P'}{\partial z'} - \frac{\partial R'}{\partial x'} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} \right) \cos Z =$$

$$= (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl = P dx + Q dy + R dz =$$

$$= (P' \cos \alpha' + Q' \cos \beta' + R' \cos \gamma') dx = P' dx + Q' dy + R' dz'$$

Якобиан преобразования при переходе к новой системе координат по модулю = 1, параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат $\Rightarrow$ интегралы слева и справа в (1) не меняют своего значения и формы.

*: π — плоскость в E^3 , $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали к π , D — односвязная область на π . Пусть D удовлетворяет условиям: 1) граница области D является замкнутой кусочно гладкой кривой без особых точек; 2) на D можно выбрать такую декартову прямоугольную систему координат, что все прямые, параллельные координатным осям, пересекают D не более чем в 2 точках. Пусть $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к кривой C , согласованный с $\mathbf{k}$.

Т1 (формула Грина). Пусть $\mathbf{a}$ — векторное поле, дифференцируемое в D , удовлетворяющее условиям 1), 2), и такое, что его производная по ∇ непрерывна в $D \cup C = \bar{D}$. Тогда справедлива

$$\iint_D (\mathbf{k}, \text{rot } \mathbf{a}) d\sigma = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl$$

30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

а) М — векторное поле, заданное в связной плоской области D . **ОТ.** Функция $U(M)$ называется **потенциалом поля $\mathbf{a}(M)$** области D , если $\text{Grad } U(M) = \mathbf{a}(M)$. Поле $\mathbf{a}$, обладающее потенциалом, называется **потенциальным**.

Т1. Пусть $\Phi = \int_C \mathbf{a}(x, y) dx$, $Q(x, y)$ непрерывны в D . Для $\forall$ двух точек $A \in D$, $B \in D$ значение интеграла

$$\int_A^B P dx + Q dy$$

не зависит от кусочно гладкой кривой $AB \in D$, соединяющей A и $B \Leftrightarrow$ поле $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенциально. Тогда

$$\int_A^B P dx + Q dy = U(B) - U(A),$$

где $U(x, y)$ — потенциал поля $\mathbf{a}(x, y)$

Док-во. Дост-сть. Пусть

$$\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\} = \text{grad } U(x, y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Произвольные A и B из D соединим некоторой кусочно гладкой кривой AB , и пусть $x = x(t), y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ — ее параметрическое представление $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ непрерывны $\Rightarrow U(x, y)$ дифференцируема в $D \Rightarrow$ по формуле Ньютона — Лейбница*:

$$\int_A^B P dx + Q dy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt =$$

$$= \int_a^b U'(t) dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(B) - U(A)$$

Необ-сть. Фиксируем в Дискоторию $M_0(x_0, y_0)$ и пусть $M(x, y)$ — $\forall$ точка в D . Положим

$$U(M) = \int_{M_0}^M P dx + Q dy$$

где интеграл берется по любой кусочно гладкой кривой, соединяющей точки M_0 и M . Покажем, что так определенная $\Phi = U(x, y)$ является искомым потенциалом поля $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$. Докажем существование $\frac{\partial U}{\partial x}$ равенство $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$. От $M(x, y)$ сместимся в $N(x + \Delta x, y)$ так, чтобы отрезок $MN \in D$. Это можно сделать для всех достаточно малых приращений Δx , т.к. D — открытое множество, состоящее из внутренних точек. Приращение $U(x, y)$ при таком смещении:

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{M_0}^{M'} P dx + Q dy - \int_{M_0}^M P dx + Q dy =$$

$$= \int_M^{M'} P dx + Q dy = \int_M^{M'} y = \text{const} \Rightarrow Q dy = 0 =$$

$$= \int_M^{M'} P dx = \int_M^{x+\Delta x} P(t, y) dt$$

$P(x, y)$ непрерывна $\Rightarrow$ из теоремы о среднем: $U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x$, $0 < \theta < 1$

$$\Rightarrow \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y)$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функций $P(x, y)$, получаем, что предел $\exists$ $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$. Аналогично доказывается $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

Если поле $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенциально и $P(x, y), Q(x, y)$ вместе со своими частными производными непрерывны в области D , то должно выполняться равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, которое означает равенство смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

По Т1 необходимым условием независимости $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ криволинейного интеграла $\int_M P dx + Q dy$ от пути интегрирования при условии непрерывности функций $P(x, y), Q(x, y)$ их частных производных в области D является легко проверяемое равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Если область D односвязная, то это условие будет и достаточным для независимости интеграла $\int_M P dx + Q dy$ от пути кривой, соединяющей данные точки A и B . Рассмотрим сначала случай, когда область D — круг.

Т2. Пусть $\Phi = \int_C \mathbf{a}(x, y) dx$, $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в некотором круге K . В этом случае поле $\mathbf{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенциально в этом круге $\Leftrightarrow K$.

Док-во. Надо доказать только достаточность. Через центр круга, точку M_0 проведем прямые $M_0 x'$ и $M_0 y'$, параллельные координатным осям Ox и Oy соответственно. Из произвольной точки $M \in K$ проведем перпендикуляры MM_0 и $MM_0 x'$ и $MM_0 y'$ соответственно. Точку M_0 соединим с точками M_1 и M_2 отрезками $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$. Применяя формулу Грина (см. конец билета 29) к прямоугольнику получаем

$$\int_{M_0 M_1 M_2 M_0} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{M_0 M_1} P dx + Q dy = \int_{M_0 M_2} P dx + Q dy$$

т.е. интеграл $\int_M P dx + Q dy$ зависит от дуговой ломаной l , соединяющей фиксированную точку M_0 с некоторой точкой M . Поэтому определим функцию

$$U(M) = \int_{M_0}^M P dx + Q dy$$

где $M_0 M$ — дуговая ломаная, звенья которой параллельны координатным осям. Проверка, что так определенная функция $U(x, y)$ является потенциалом данного поля $\mathbf{a}(x, y)$, проводится аналогично той, которая проведена при доказательстве теоремы 1.

32. Справедлива в случае произвольной односвязной области D . Чтобы убедиться в этом, докажем, что для независимости криволинейного интеграла $\int_M P dx + Q dy$ от выбора кривой AB достаточно выполнение в Дусловия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Пусть L — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая, расположенная в D . Обозначим через D^* область, которую ограничивает кривая L . В силу односвязности области D каждая точка области D^* принадлежит D . Применяя к области D^* формулу Грина, получим

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

Отсюда следует, что для любых фиксированных точек A и B области D любых двух кусочно гладких кривых ACB и $AC'B$ соединяющих эти точки, выполняются равенства:

$$0 = \int_{ACB} P dx + Q dy = \int_{AC'B} P dx + Q dy + \int_{ACB} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{AC'B} P dx + Q dy - \int_{AC'B} P dx + Q dy$$

$$\Rightarrow \int_{ACB} P dx + Q dy = \int_{AC'B} P dx + Q dy$$

$\Rightarrow$ значение интеграла $\int_M P dx + Q dy$ не зависит от кусочно гладкой кривой AB , соединяющей A и B .

*: Для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ можно составить разность значений произвольной ее первообразной для верхов и нижнего пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)|_a^b$$